Chapitre 8 — Équations différentielles autonomes

I Définition et quelques propriétés

Définition

Une *équation différentielle scalaire autonome d'ordre 1* est une équation différentielle du type :

$$y' = F(y)$$

avec y l'inconnue qui est une fonction dérivable et F une fonction continue. On appelle (E) cette équation dans la suite du cours. Une solution de cette équation est une fonction y $\mathcal{C}^1$ sur un **intervalle** $I \subset \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = F(y(t)).$$

Remarque :

L'ensemble $\mathbb{R}^*$ n'est par exemple pas un intervalle, mais $]0, +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ sont deux intervalles distincts.

Commentaires :

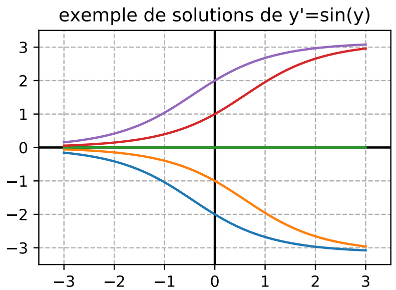
Dans le programme est stipulé que : "Aucune théorie générale ne doit être faite. Toute étude devra être entièrement guidée".

■ **Exemple 1** :

L'équation

$$y' = \sin(y)$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une équation autonome d'ordre 1. Voici quelques représentations graphiques de solutions *(obtenues avec la fonction* `solve_ivp` *de Python – pour l'utilisation : cf TP d'informatique)*

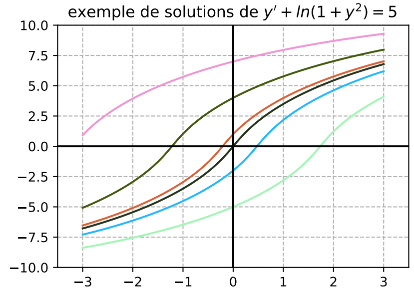


■ **Exemple 2** :

L'équation

$$y' + \ln(1 + y^2) = 5$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une équation autonome d'ordre 1. Voici quelques représentations graphiques de solutions :



Remarque :

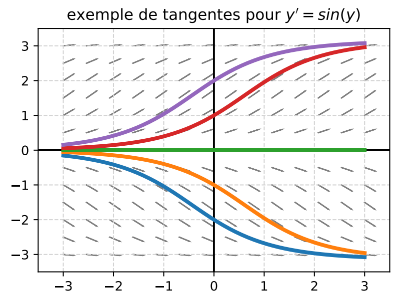
Deux courbes de solutions qui passent par une même ordonnée ont des tangentes parallèles.

En effet, notons k cette ordonnée commune. Dès qu'une courbe passe par cette ordonnée (en une abscisse t), on a $y(t) = k \in \mathbb{R}$. La pente de la tangeante à la courbe est

$$y'(t) = F(y(t)) = F(k).$$

qui est donc indépendant de y et de l'abscisse t (ne dépend que de l'ordonnée k.)

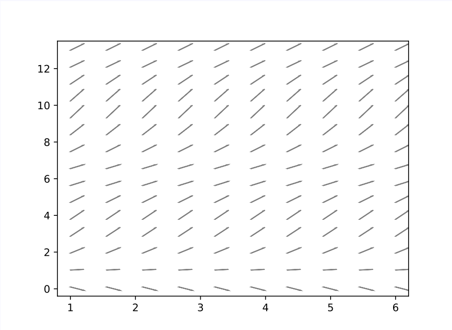
Par exemple, représentons les pentes des tangentes pour pour l'équation $y' = \sin(y)$ d'inconnue y :



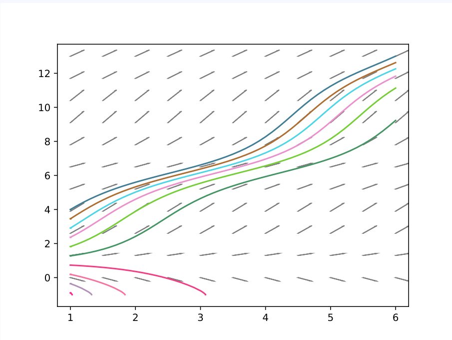
Ceci permet de conjecturer instinctivement que deux courbes de solutions ne se recoupent jamais. *(à méditer.)*

? Exercice 1

Voici ci-dessous un exemple de tangentes obtenues pour une équation autonome. Esquisser plusieurs courbes de solutions possibles correspondant à ce graphique. *(On prendra notamment comme point de départ des courbes des ordonnées inférieures à 1 ainsi que supérieures à 2.)*



Solution



Définition et Proposition

Si a est un réel tel que $F(a) = 0$ alors $y : t \mapsto a$ est une solution de (E). On appelle *équilibre* ou *état stationnaire* les solutions constantes de (E).

Démonstration :

En réinjectant dans l'expression $y' - F(y)$, on constate que pour $y : t \mapsto a$, on obtient

$$y' - F(y) = 0 - F(a)$$

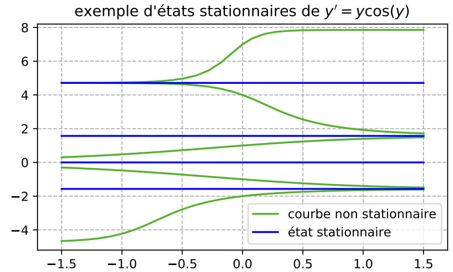
Ainsi, si $F(a) = 0$, on a bien

$$y' - F(y) = 0$$

et $y : t \mapsto a$ est bien une solution constante de l'équation différentielle. □

■ Exemple 3 :

Les fonctions constantes $y_0 : t \mapsto 0$ et $y_1 : t \mapsto \frac{\pi}{2}$ sont des états stationnaires de l'équation $y' = y\cos y$. *(exemples ci-dessous)*



Proposition 1

Soit $k \in \mathbb{R}$. On note $J = \{u - k \mid u \in I\}$. Alors :

- $\forall t \in J$, on a $t + k \in I$
- et si y est une solution de l'équation (E) sur I, alors $\varphi : t \in J \mapsto \varphi(t+k)$ avec k réel est solution de (E) sur J.

Commentaires :

Graphiquement, ceci signifie que toute translation horizontale (à gauche ou a droite) d'une courbe est encore la courbe d'une solution

Démonstration :

Avec les notations de la proposition, pour tout $t \in J$, il existe $u \in I$ tel que

$$t = u - k$$

d'où

$$t + k = u \in I$$

Ainsi, $\varphi : t \in J \mapsto y(t+k)$ est bien définie et dérivable et de plus

$$\varphi'(t) = y'(t+k)$$

Or y est solution, donc, pour tout $u \in I$, on a

$$y'(u) = F(y(u))$$

d'où ici

$$\varphi'(t) = y'(t+k) = F(y(t+k)) = F(\varphi(t))$$

i.e. φ est solution de l'équation □

? Exercice 2

On considère l'équation autonome $y' = \frac{1}{y}$.

1. Montrer que y vérifie cette équation ssi

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid y^2(x) = 2x + 2c$$

2. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{y :]-c, +\infty[\mapsto \sqrt{2}\sqrt{c+x}\}$$

3. Vérifier que si y est solution sur I, pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a, $\varphi : t \mapsto y(t+k)$ est encore une solution sur $J = I - k$.

Solution

1. On observe que $\quad y' = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y'y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(2y^2)' = 1.$
Ceci équivaut donc à

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid y^2(x) = 2x + c$$

2. Pami les possibilités définies précédemment, il nous faut $2x + 2c \geqslant 0$ sur tout l'ensemble de définition afin que la racine soit bien définie et $2x + 2c \neq 0$ afin que y ne s'annule pas et soit bien dérivable, d'où les solutions

$$\{y :]-c, +\infty[\mapsto \sqrt{2}\sqrt{c+x}\}$$

3. Si $k \in \mathbb{R}$ et $y :]-c, +\infty[\mapsto \sqrt{2}\sqrt{c+x}$ une solution, on a $\varphi : t \in J \mapsto y(t+k) = \sqrt{2}\sqrt{c+k+x} = \sqrt{2}\sqrt{C+x}$ qui est bien définie et dérivable et est bien solution.

II Résolutions graphiques : méthode d'Euler

On rappelle (cf TP d'informatique) que l'on peut obtenir graphiquement des approximations de courbes de solutions grâce à la méthode d'Euler, que vous devez connaître *(mais dont l'énoncé est censé être rappelé en cas d'utilisation.)*

Théorème 2 *Méthode d'Euler*

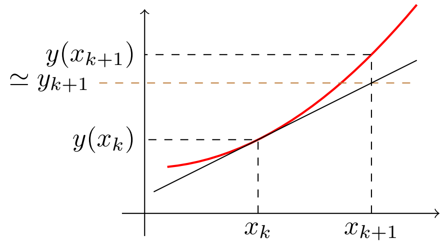
Soient y une solution de (E) sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ et n un entier naturel non nul. Soit ensuite $(y_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ la suite finie définie par :

$$\begin{cases} y_0 = y(\alpha) \\ h = \frac{\beta - \alpha}{n} \\ y_{k+1} = y_k + hF(y_k) \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!] \end{cases}$$

Alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, si n est assez grand, on a :

$$y_k \simeq y(x_k)$$

qui repose sur l'approximation faite grâce à la définition de la dérivée et qui se traduit graphiquement par le schéma suivant : Ce qui se traduit graphiquement de la manière suivante :

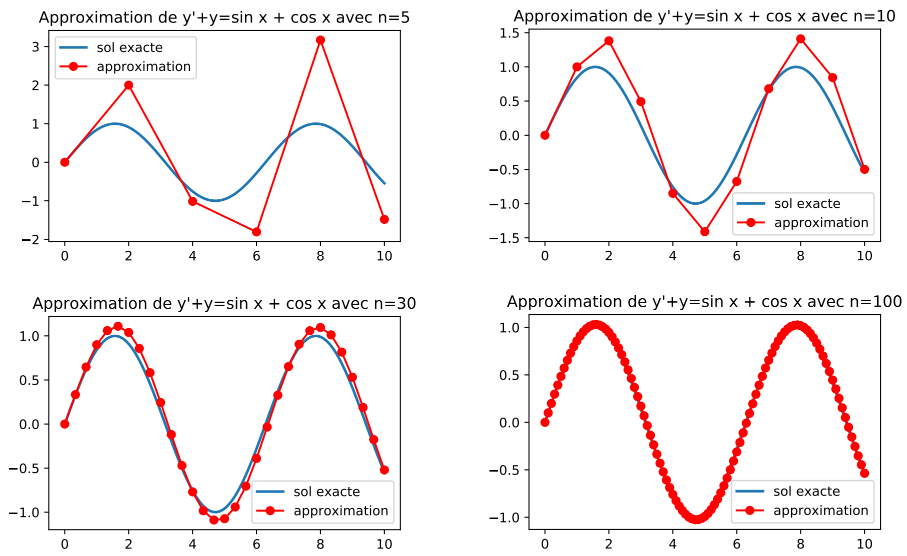


■ Exemple 4 :

Avec l'équation $y' + y = \cos x + \sin x$, sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, on a , pour $h = \frac{\beta-\alpha}{n}$,

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\cos x_k + \sin x_k - y_k\right) \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!]$$

et où on constate que les approximations deviennent en effet logiquement meilleures quand le nombre n de points augmente :



III Exemples de résolutions en dynamique des populations

Nombre d'individus

Dans tous les exemples de cette section, on note $N(t)$ une fonction positive que l'on suppose dérivable et qui désigne le nombre d'individus dans une population donnée, à l'instant t (Le nombre d'individus peut être non entier.)

III-1 Modèle de Malthus

Explications : *Dans ce modèle attribué à Thomas Malthus, on considère une population isolée et sans contrainte, au sens suivant :*

- *espace et nourriture illimités,*
- *absence de prédateur,*
- *resistance aux maladies, etc. . . .*

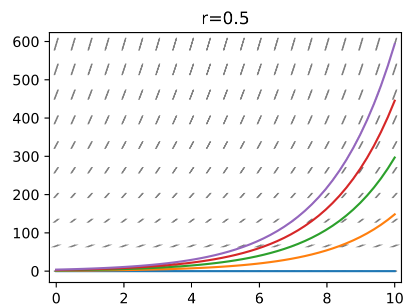
On note r le "taux de croissance" de l'espèce. On veut traduire le fait que plus il y a d'individus, plus ils se reproduisent vite.

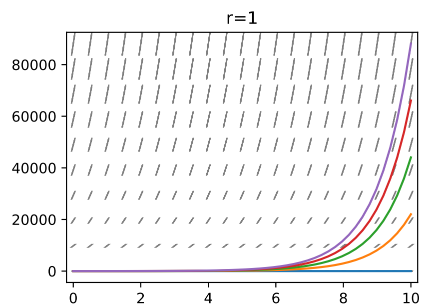
Définition

Dans le modèle élémentaire de Malthus, on estime que

$$N'(t) = rN(t) \quad \forall t \geq 0$$

On obtiendra un graphique du type suivant avec $r = 0.5$ et $r = 1$:





Exercice 3

Montrer que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions

$$\boxed{N : t \geq 0 \mapsto N(0)e^{rt}}$$

Solution

Il s'agit d'une équation différentielle homogène de type $y' =$ "*constante*"$.y$. D'après le cours, on connait ses solutions. Elles s'écrivent

$$N(t) = \lambda e^{rt}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En prenant $t = 0$, on trouve

$$N(0) = \lambda e^0 = \lambda$$

D'où la solution.

III-2 Modèle Logistique

Explications : *Dans ce modèle attribué à Verhlust en 1836, on considère une population isolée du même type que le modèle de Malthus, mais avec une contrainte environnementale, au sens suivant :*

- *nourriture illimités, absence de prédateur, resistance aux maladies, etc. . .*
- *mais espace limité.*

On note r le "taux de croissance" de l'espèce et K la capacité d'accueil du milieu.

Définition

Dans ce modèle, on estime que $\quad N'(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t) \quad \forall t \geq 0$

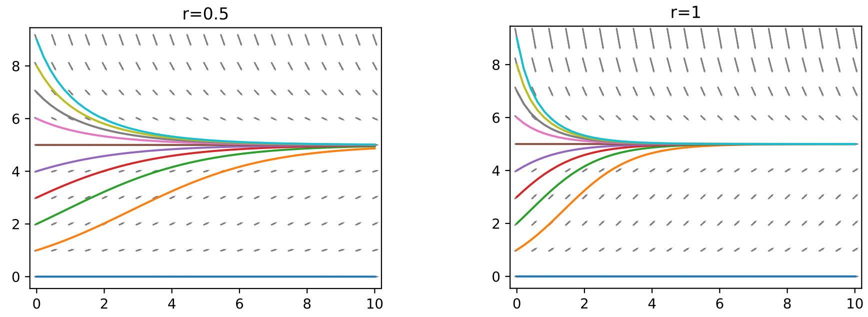
Commentaires :

- *Quand N est inférieur à la capacité du milieu, on a $1 - \frac{N(t)}{K} > 0$. Ainsi $N' > 0$ et la population augmente.*
- *Quand N est supérieur à la capacité du milieu, on a $1 - \frac{N(t)}{K} < 0$. Ainsi $N' < 0$ et la population diminue.*
- *En revanche, quand N est proche de la capacité d'accueil du milieu (par valeurs inférieures), la croissance ralenti de plus en plus. On a*

  $$\textit{Si } N(t) \simeq K \textit{ alors } 1 - \frac{N(t)}{K} \simeq 0 \textit{ et donc } N' \simeq 0$$

  La population stagne
- *Tant que N est loin de K par valeurs inférieurs, $1 - \frac{N(t)}{K} \simeq 1$, on a $N' \simeq rN$. Le modèle est proche du modèle de Malthus et tout se passe à peu près comme si l'espace était illimité.*

On obtiendra un graphique du type suivant avec $r = 0.5$ et $r = 1$:



? Exercice 4

1. Montrer que $N : t \mapsto 0$ et $N : t \mapsto K$ sont des états stationnaires du modèle.

2. Supposons que N ne s'annule pas. Poser pour tout $t \geq 0$, $z(t) = \frac{1}{N(t)}$. Montrer que

$$N'(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t) \quad \Leftrightarrow \quad z' = -rz + \frac{r}{K}$$

3. En déduire que solutions du modèle logistique sont :

$$\boxed{N : t \geq 0 \mapsto \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right)e^{-rt}}}$$

4. Justifier qu'il n'y a pas d'autres états stationnaires.

Solution

1. Trivial car on obtient bien $0 = 0$ en réinjectant.

2. On a $z' = -\frac{N'}{N^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} N'(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{N'(t)}{N^2(t)} = \frac{r}{N(t)}\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad -z'(t) = rz(t) - \frac{r}{K} \end{aligned}$$

D'où l'équation équivalente $z' = -rz + \frac{r}{K}$.

3. Les techniques de cours habituelles donnent comme solutions à l'équation homogène les fonctions

$$z_0 : t \geq 0 \mapsto \lambda e^{-rt}$$

On cherche comme solution particulière une constante qui est

$$y_p : t \geq 0 \mapsto \frac{1}{K}$$

Ainsi, les solutions générales sont de la forme

$$z(t) : t \geq 0 \mapsto \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$$

avec ainsi

$$N(t) : t \geq 0 \mapsto \frac{1}{\lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}}$$

la condition initiale en $t = 0$ donne

$$\begin{aligned} N(0) = \frac{1}{\lambda e^{-r0} + \frac{1}{K}} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda + \frac{1}{K} = \frac{1}{N(0)} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{N(0)} - \frac{1}{K} \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$N(t) : t \geq 0 \mapsto \frac{1}{\left(\frac{1}{N(0)} - \frac{1}{K}\right)e^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{K}{\left(\frac{K}{N(0)} - 1\right)e^{-rt} + 1}$$

4. Les états stationnaires sont ceux où la dérivée est constante égale à 0. Ce sont donc ceux qui répondent à l'équation

$$r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t) = 0$$

Ce qui se passe ssi

$$\boxed{N : t \mapsto 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{ou} \quad N : t \mapsto K \quad \forall t \geq 0}$$

III-3 Le modèle de Gompertz

Explications : *Gompertz introduit en 1825 la notion d'évolution du taux de mortalité avec l'âge avançant, avec capacité du milieu limitée.*

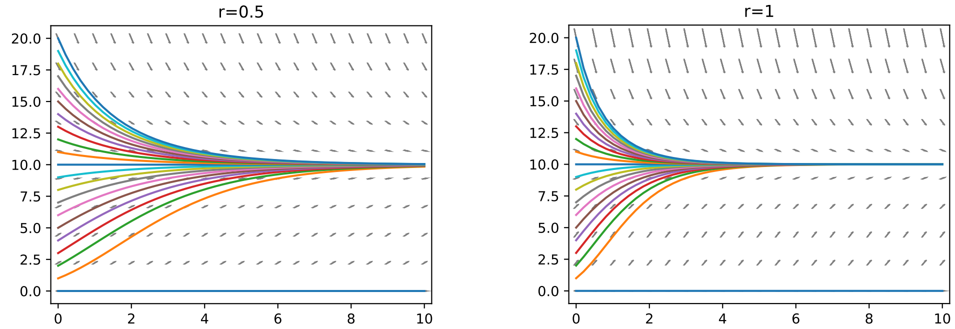
Définition

Avec les mêmes notations que le modèle logistique, il introduit l'équation :

$$N'(t) = r\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)N(t) \quad \forall t \geq 0$$

Pour tout N application qui ne s'annule pas.

On obtiendra un graphique du type suivant avec $r = 0.5$ et $r = 1$:



Commentaires :

Dans l'hypothsèe où $r > 0$:

- *Quand N est inférieur à la capacité K du milieu, on a* $\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) > 0$. *Ainsi* $N' > 0$ *et la population augmente.*
- *Quand N est supérieur à la capacité K du milieu, on a* $\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) < 0$. *Ainsi* $N' < 0$ *et la population diminue.*
- *En revanche, quand N est proche de la capacité d'accueil du milieu (par valeurs inférieures), la croissance ralenti de plus en plus. On a*

$$\textit{Si } N(t) \simeq K \textit{ alors } \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \simeq 0 \textit{ et donc } N' \simeq 0$$

La population stagne.

Exercice 5

On pose ici $r > 0$. On rappelle que dans notre modèle, N ne s'annule pas et est donc > 0.

1. Déterminer le/les éventuels états stationnaires.

2. Poser pour tout $t \geq 0$, $z(t) = \ln(N(t))$. Montrer que l'équation de Gompertz équivaut à

$$z' + rz = c$$

avec c une constante à déterminer.

3. Résoudre l'équation en z.

4. En déduire que pour toute condition initiale $N(0) > 0$, la solution du modèle logistique est :

$$\boxed{N : t \geq 0 \mapsto Ke^{-\ln\frac{K}{N(0)}e^{-rt}}}$$

Solution

1. Les états stationnaires sont ceux où la dérivée est constante égale à 0. Ce sont donc ceux qui répondent à l'équation

$$r\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)N(t) = 0$$

Or, comme on a supposé $N(t)$ non nulle, il ne reste plus que $\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{N : t \mapsto K \quad \forall t \geq 0}$$

2. On a $z' = \frac{N'}{N}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} N'(t) = r\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)N(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{N'(t)}{N(t)} = r\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad z'(t) = r\ln K - rz(t) \end{aligned}$$

D'où l'équation équivalente $\boxed{z' + rz = r\ln K.}$

3. Les techniques de cours habituelles donnent comme solutions à l'équation homogène les fonctions

$$z_0 : t \geq 0 \mapsto \lambda e^{-rt}$$

On cherche comme solution particulière une constante qui est

$$y_p : t \geq 0 \mapsto \ln K$$

Ainsi, les solutions générales sont de la forme

$$\boxed{z(t) : t \geq 0 \mapsto \lambda e^{-rt} + \ln K}$$

4. Comme $N = e^z$, on déduit de la question précédente :

$$N(t) : t \geq 0 \mapsto e^{\lambda e^{-rt} + \ln K}$$

La condition initiale en $t = 0$ donne

$$\begin{aligned} N(0) = e^{\lambda e^{-r0} + \ln K} \quad &\Leftrightarrow \quad N(0) = e^{\lambda + \ln K} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda + \ln K = \ln(N(0)) \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = \ln(N(0)) - \ln K = -\ln\frac{K}{N(0)} \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$N(t) : t \geq 0 \mapsto e^{\ln\frac{K}{N(0)}e^{-rt} + \ln K} = Ke^{-\ln\frac{K}{N(0)}e^{-rt}}$$